

TD₆ – Suites et séries**Exercice 1** ★★

Déterminer les limites des suites suivantes

1. $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$

2. $u_n = \frac{n \sin n}{1 + n^2}$

3. $u_n = \sqrt[n]{n}$

4. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

5. $u_n = n^2 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)$

6. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2}$

7. $u_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n)}$

Exercice 2 ★★

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_1$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) u_1$.

3. Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 3 ★★★

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes

1. $u_n = \exp\left(\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + n}\right) - 1$

2. $v_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n}$

3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$.

4. $z_n = \binom{n}{k}$

Exercice 4 ★★★

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$, et soit $v_n = \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n e^{-u_n}$.

Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$, puis en déduire la limite de (v_n) .

Exercice 5 ★★

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Montrer que (v_n) est convergente, et déterminer un équivalent simple de v_n .

Exercice 6 ★★

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n^2}$;

2. $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$ (on ne cherchera pas de valeur pour la limite);

3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$.

Exercice 7 ★★★

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $[0, 1]$ par : $P_n : x \mapsto x^n - (1 - x)a$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.
3. Notons ℓ la limite de la suite (x_n) . Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 8 ★★

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$

- | | |
|---|--|
| 1. $u_n = \frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1}$ | 9. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ |
| 2. $u_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3 + 1}$ | 10. $u_n = \frac{n!}{2^n}$ |
| 3. $u_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$ | 11. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ |
| 4. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$ | 12. $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$ |
| 5. $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ | 13. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{\pi}{n}$ |
| 6. $u_n = \ln \left(2 - e^{1/n}\right)$ | 14. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ |
| 7. $u_n = \frac{n \sin \left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+n^2}}$ | 15. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}$ |
| 8. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{\pi}{n}$ | 16. $u_n = \frac{(n!)^3}{(4n)!}$ |

Exercice 9 ★★★

Soit $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n , selon le/les paramètre(s) :

- | | |
|---|---|
| 1. $u_n = \frac{2^n}{n^2} (\sin a)^{2n}$; | 3. $u_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$. |
| 2. $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$; | 4. $u_n = \exp(-\ln(n)^\alpha)$ |
| | 5. $u_n = \sqrt{e^{n^\alpha} - 1}$ |

Exercice 10 ★★★

Déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5 + n^5}} dx$ puis $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x} dx$

Exercice 11 ★★

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in]0, 1[$ et φ une fonction continue. Déterminer si les séries suivantes convergent, et le cas échéant, calculer leur somme

- | | | |
|---------------------------------|---|--|
| 1. $\sum \frac{3^{2n+1}}{n!}$ | 5. $\sum \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$ | 9. $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n!}$ |
| 2. $\sum n2^{n-1}$ | 6. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | 10. $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$ |
| 3. $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ | 7. $\sum \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ | 11. $\sum \int_0^a t^n \varphi(t) dt$ |
| 4. $\sum n \frac{3^n}{4^{n+1}}$ | 8. $\sum \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$ | 12. $\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ |

Exercice 12 ★★

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n^2$ converge ; | 3. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \rightarrow 0$; |
| 2. $u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge ; | 4. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge. |

Exercice 13 ★★★

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 14 ★★★

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$.

1. Trouver une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 15 Série harmonique et constante d'Euler. ★★★

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge, puis déterminer les sommes partielles de cette série.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 16 ★★

Pour $n \geq 1$, soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2 - 1}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge
3. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \geq 1, \frac{k}{4k^2 - 1} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k-1}$.
4. En déduire la somme de la série $\sum u_n$

Exercice 17 ★★

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 18 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$
2. Montrer que $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable et que $\int_0^1 e^t \ln(t) dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★

(Oral 2019)

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Indication : étudier $f_{n+1}(x_n)$ et exprimer $\frac{1}{2}$ en fonction de x_n .

3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 20 ★★

(Oral 2019)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier la convergence de la suite u et déterminer son éventuelle limite.
2. Étudier la convergence de la série $\sum u_n^2$
3. Montrer que les séries $\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ et $\sum u_n$ sont de même nature
4. En déduire la nature de $\sum u_n$

Exercice 21 ★★

(Oral 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1. Est ce que la série $\sum u_n$ est absolument convergente ?
2. (a) Calculer $\int_0^1 t^{2k} dt$ et montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$
 (b) En déduire que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme
3. Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une approximation de π à 10^{-2} près ?

Exercice 22 ★★★★★

(Oral 2014, 2018)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \pi]$, montrer que $\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$
3. Soit g la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $g(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
4. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.